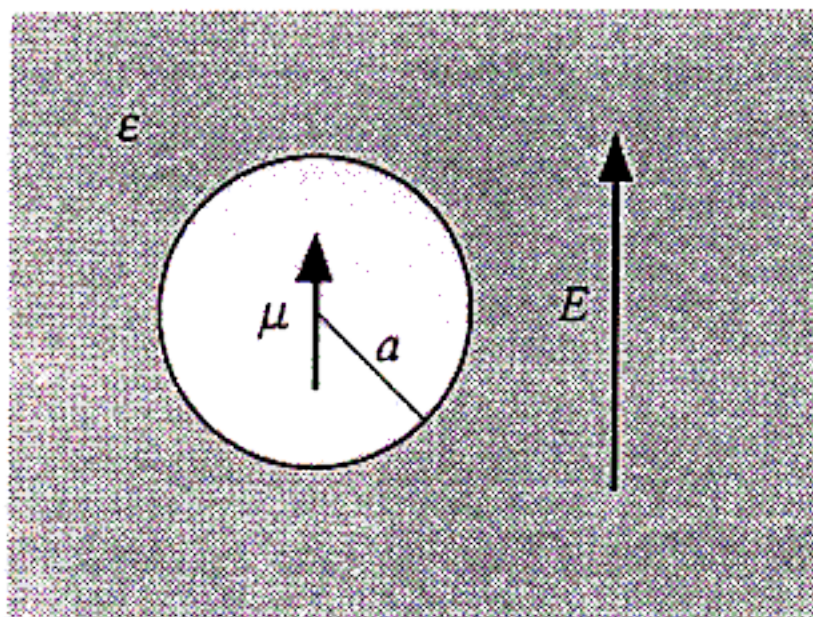


[物理学 I] (全 1 題)

[問題 1]

分極率 α をもつ無極性分子からなる等方的な液体の巨視的誘電率 ϵ を以下のように考察して求めよう。ただし、巨視的誘電率 ϵ はその液体に一様な電場 E がかったときに生じる分極 P (単位体積あたりの双極子モーメント) を与える係数 χ (すなわち $P = \chi E$ なる電気感受率) を用いて、 $\epsilon = \epsilon_0 + \chi$ と定義され、電場 E と電気変位 D を結ぶ係数となる ($D = \epsilon E$)。 ϵ_0 は真空の誘電率である (ここで用いられている単位系は S I で、電荷 e のつくる真空中のクーロン電位は $e/4\pi\epsilon_0 r$ となる)。なお液体中での分子の数密度を ρ とする。

問 A 液体に z 方向から一様な巨視的電場 E がかった場合をミクロに観察する。下図のようにどれかひとつの分子 (半径 a の球形の空洞にあるとする) に注目し、残りを一様連続な誘電体とみなすと、球内の誘起双極子が感じる電場 E' (局所電場) は E と異なっている。これはなぜか。簡単に説明せよ。



問 B 注目した分子はどのような誘起双極子モーメント μ をもつか。局所電場 E' を用いて表せ。

問 C 注目した分子とそれ以外は実際には同じであることを用いて、巨視的分極率 P を誘起双極子モーメント μ を用いて表せ。

問 D 局所電場 E' と巨視的誘電率 ε を求めるために、以下の (i)–(v) に答えよ。ただし、球内の誘電率は ε_0 としてよい。半径 a は分子の占有体積と一致するようにとる。即ち、 $4/3\pi a^3 = 1/\rho$ 。

(i) 電位 ϕ は、極座標系 (r, θ, φ) で φ 依存性がないことから、

$$\phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

と変数分離して与えられる。このとき、 $R(r)$ と $\Theta(\theta)$ の満たす微分方程式を求めよ。ただし、Laplacian は極座標系では、

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

である。

(ii) (i) の解は球内と球外でそれぞれ A^{ex}, B^{ex} と A^{in}, B^{in} の 2 つずつのパラメーターによって、

$$\phi^{ex} = \left(A^{ex} r + \frac{B^{ex}}{r^2} \right) \cos \theta \quad (r > a)$$

$$\phi^{in} = \left(A^{in} r + \frac{B^{in}}{r^2} \right) \cos \theta \quad (r < a)$$

となる。これらの係数を $r \rightarrow \infty$ と $r \rightarrow 0$ での境界条件を満たす形に書こう。 $r \rightarrow \infty$ では巨視的電場 E があることから A^{ex} が、また $r \rightarrow 0$ には誘起双極子モーメント μ があることから B^{in} が決まる。 A^{ex} と B^{in} を与えよ。

(iii) さらに B^{ex} と A^{in} を決めよう。これは $r = a$ で、電位 E の θ 成分 E_θ と電気変位 D の r 成分 D_r が球の内外で等価となることから求まる。

$$E_\theta^{ex}(r = a, \theta) = E_\theta^{in}(r = a, \theta)$$

$$D_r^{ex}(r = a, \theta) = D_r^{in}(r = a, \theta)$$

B^{ex} と A^{in} を求めよ。

(iv) 球内の誘起双極子が感じる電場 (局所電場) E' は ϕ^{in} の第 1 項に由来する。 E' を ε 、 ε_0 、 E のみを用いて書け。

(v) 誘電率 ε を ε_0 、構成分子の分極率 α 、数密度 ρ を用いて書け。