［基礎科目（物理学）］

［問題］以下の文章を読み，問 A ～ E に答えよ．

電荷qの点電荷がN（$N \geq 2$）個，円周上に等間隔で取り付けられている半径R，質量Mの十分に薄い円板の古典的な運動を考えよう．円板の中心軸をz軸とする円筒座標系(r, ϕ, z)を設定する（図 1，ただし$\overrightarrow{e_r}$，$\overrightarrow{e_\phi}$，$\overrightarrow{e_z}$はそれぞれr，ϕ，z方向の単位ベクトル）．円板はz軸に沿って傾くことなく速度v_zで運動し，かつ中心軸の周りを角速度ωで回転している．この系には

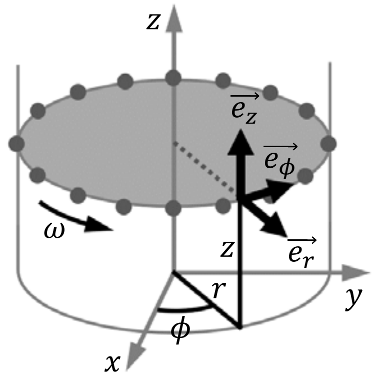

図 1　点電荷を配置した円板および設定した円筒座標系．

$$\vec{B} = k(-R\overrightarrow{e_r} + 2z\overrightarrow{e_z}) \tag{1}$$

により表される外部磁場が印加されており（kは定数），また重力は無視できるものとする．

このとき，磁場によりn番目の点電荷に働く力$\overrightarrow{F_n}$は

$$\overrightarrow{F_n} = q\overrightarrow{v_n} \times \vec{B} = qk\left(2\omega Rz\overrightarrow{e_r} + \boxed{\quad ア \quad} \cdot \overrightarrow{e_\phi} + \boxed{\quad イ \quad} \cdot \overrightarrow{e_z}\right) \tag{2}$$

により与えられる（「×」はベクトル積，「・」は積を表す）．ここで

$$\overrightarrow{v_n} = \omega R\overrightarrow{e_\phi} + v_z\overrightarrow{e_z} \tag{3}$$

はn番目の点電荷の速度である．よって全ての点電荷によるz軸方向の合力F_zは

$$F_z = Nqk \cdot \boxed{\quad イ \quad} \tag{4}$$

であり，円板のz方向の運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \boxed{\quad ウ \quad} \cdot \omega \tag{5}$$

と表せる．一方，全ての点電荷によるz軸周りのトルクの合計T_ϕは

$$T_\phi = N \cdot \boxed{\quad エ \quad} \tag{6}$$

であることから，円板のϕ方向の運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{NqkR^2}{I}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

となる（Iは円板の慣性モーメント）.

問 A　空欄 $\boxed{\quad ア \quad}$ および $\boxed{\quad イ \quad}$ に入る数式をω，R，v_zを用いて表せ．ただし，二つの三次元ベクトル$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$に対して，両者のベクトル積は$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$により与えられる.

問 B　空欄 $\boxed{\quad ウ \quad}$ に入る数式をN，q，k，R，Mを用いて表せ.

問 C　空欄 $\boxed{\quad エ \quad}$ に入る数式をq，k，R，v_zを用いて表せ．また，式(7)を導出せよ.

問 D　式(5)および式(7)を初期条件

$$z(0) = 0,$$
$$\omega(0) = \omega_0,$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$$

の下で連立させて解くことで，任意の時刻 t における$\omega(t)$および$z(t)$をM，I，ω_0，αを用いて表せ．ただし，

$$\alpha = \frac{NqkR^2}{\sqrt{MI}}$$

である.

問 E　円板の全運動エネルギー，すなわちz方向とϕ方向の運動エネルギーの和が，時刻 t によらず一定であることを，問 D で得られた結果を用いて示せ.