# ［専門科目（物理学）］

［問題1］以下の文章を読み，問A～Dに答えよ．
質量$m$の自由粒子の一次元運動を考える．時間$t=0$における実空間での粒子の波動関数$\psi(x,t=0)$は以下のような関数で表されるとする．

$$\psi(x,0)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}\exp(ik_0x-\alpha x^2/2) \tag{1}$$

ここで，$k_0$および$\alpha$は実数である．

さらに，時間$t=0$における運動量空間での粒子の波動関数$\Phi(k,0)$は，運動量を$p$とした場合$k=p/\hbar$で与えられる波数$k$に関する$\psi(x,0)$のフーリエ変換により，

$$\Phi(k,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,0)\exp(-ikx)dx \tag{2}$$

と表される．ここで，$\hbar=h/(2\pi)$であり，$h$はプランク定数である．

問題を解くうえで，適宜以下の公式を利用してもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ax^2)\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\exp(-ax^2)\,dx=0 \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\exp(-ax^2)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \tag{5}$$

問A　式(2)を用いると，$t=0$での運動量空間での粒子の波動関数は，

$$\Phi(k,0)=\left(\frac{1}{\pi\alpha}\right)^{1/4}\exp\left\{-\frac{(k-k_0)^2}{2\alpha}\right\} \tag{6}$$

となることを示せ．なお，導出過程を明記せよ．

問B　運動量空間における時間$t>0$の波動関数は$\Phi(k,t)=\Phi(k,0)\mathrm{e}^{-i\hbar k^2t/2m}$と表せる．$\Phi(k,t)$の確率密度関数を求めよ．

問C　運動量空間における波動関数を用いて，$t>0$における運動量に関する期待値，$\langle p\rangle_t$および$\langle p^2\rangle_t$を求めよ．ここで，$\langle\cdots\rangle_t$は時間$t$における期待値を表す記号である．

問D　$t>0$ における位置に関する期待値，$\langle x \rangle_t$および$\langle x^2 \rangle_t$はそれぞれ，

$$\langle x \rangle_t = \frac{\hbar k_0}{m} t \tag{7}$$

$$\langle x^2 \rangle_t = \left(\frac{\hbar k_0}{m} t\right)^2 + \frac{1}{2\alpha}\left\{1 + \left(\frac{\hbar t \alpha}{m}\right)^2\right\} \tag{8}$$

である．時間$t>0$における$p$および$x$の分散$(\Delta p)_t{}^2$，$(\Delta x)_t{}^2$が

$$(\Delta p)_t{}^2 (\Delta x)_t{}^2 > \frac{\hbar^2}{4} \tag{9}$$

を満たすことを示せ．これは，不確定性原理を表している．

［問題2］ 以下の文章を読み，問 A～D に答えよ．

ゴムひもの弾性を簡単な高分子鎖モデルで考察する．図 1 に概略を示す．高分子は長さ $a$ の $N$ 個のモノマーからなり，それぞれのモノマーはひもの伸張方向の $x$ 軸，およびそれに垂直な $y$ 軸の方向に向くことが出来る．モノマー同士の排除効果は無視し，重なることが出来るとする．$x$ 軸方向に向いたモノマーのエネルギーは 0，$y$ 軸方向に向いたモノマーのエネルギーは $\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ とし，高分子鎖の内部エネルギーを $U$ とする．ひもの一端の座標は原点，もう一方の端の座標は $L_x$ および $L_y$ とし，$L_y = 0$ であるとする．

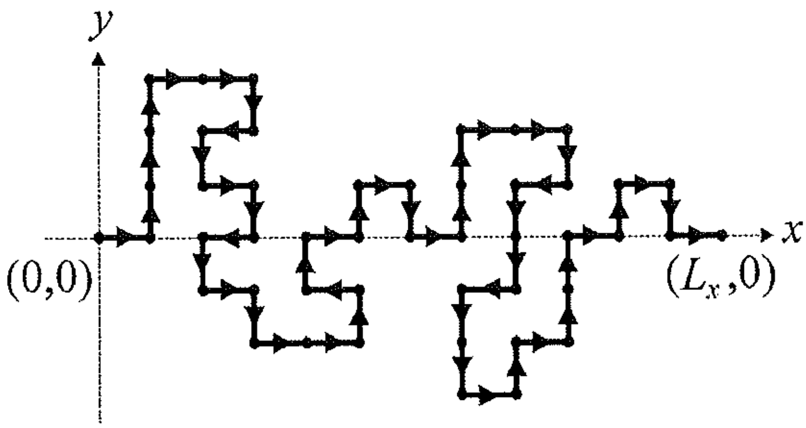


図 1 ゴムひもの高分子鎖の概略図

高分子中で，$x$ 軸の正方向および負方向に向いているモノマーの数をそれぞれ $N_x^+$ および $N_x^-$，$y$ 軸のそれらを $N_y^+$ および $N_y^-$ とすると，以下の関係式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
N &= N_x^+ + N_x^- + N_y^+ + N_y^- \\
l_x &\equiv L_x / a = N_x^+ - N_x^- \\
l_y &\equiv L_y / a = N_y^+ - N_y^- = 0 \\
u &\equiv U / \varepsilon = N_y^+ + N_y^-
\end{aligned}
\tag{1}
$$

この高分子鎖の微視的状態数 $\Omega$ は，$N$ 個のモノマーをそれら 4 方向の向きに分配する組み合わせの数なので，$N$，$N_x^+$，$N_x^-$，$N_y^+$，および $N_y^-$ の階乗を用いて

$$\Omega = \boxed{\quad ア \quad} \tag{2}$$

と表される．エントロピー $S$ は $\Omega$ を用いて

$$S = k_B \ln \Omega \tag{3}$$

と定義される．ここで$k_B$はボルツマン定数である．式(1)〜(3)より，$S$は$N$，$L_x(=al_x)$，および$U(=\varepsilon u)$の関数として表される．モノマーの数$N$が大きい熱力学的極限でStirlingの近似式を適用すると，$S$に対して次式を得る．

$$\begin{aligned} S &= k_B N \ln N - k_B u \ln \frac{1}{2} u \\ &- \frac{k_B}{2}\left(N + l_x - u\right)\ln\frac{1}{2}\left(N + l_x - u\right) - \frac{k_B}{2}\left(N - l_x - u\right)\ln\frac{1}{2}\left(N - l_x - u\right) \end{aligned} \tag{4}$$

更に，①温度$T$の定義式を用いると，以下の状態方程式を得る．

$$e^{\frac{2\varepsilon}{k_B T}} = \frac{\left(N-u\right)^2 - l_x^{\,2}}{u^2} \tag{5}$$

問A　文中の空欄$\boxed{\quad ア \quad}$に当てはまる式を記せ．

問B　下線部①に関して，温度$T$は$S$の偏微分を用いて定義される．温度$T$の定義式を$S$，$N$，$L_x$，$U$，および偏微分記号を用いて記せ．

問C　$L_x = 0$のとき，熱力学的極限における$N_x^+$，$N_x^-$，$N_y^+$，および$N_y^-$の平均値（それぞれ$\bar{N}_x^+$，$\bar{N}_x^-$，$\bar{N}_y^+$，および$\bar{N}_y^-$とする）の大小関係を，以下の場合について等号・不等号（$=,>,<$）を用いて表せ．

(a) $T$が有限．

(b) 高温極限$\varepsilon/(k_B T) \to 0$．

問D　ゴムひもを$L_x = 0$から最大値である$L_x = aN$まで温度$T$で準静的に等温伸張する．

(a) 内部エネルギー$U$の変化を$N$，$\varepsilon$，$T$，および$k_B$を用いて表せ．

(b) 高温極限$\varepsilon/(k_B T) \to 0$のとき，系になされた仕事を，$N$，$T$，および$k_B$を用いて表せ．