［化学物理Ⅰ（基礎）］　（全2題）

［問題1］以下の文章を読み，問A〜Eに答えよ．

磁束密度$\vec{B}=(0,\ 0,\ B)$の一様な磁場(magnetic field)に，質量(mass)がm，電荷(charge)がqの荷電粒子が$\vec{v}=(v_x,\ v_y,\ 0)$の速度(velocity)で磁場に対して垂直に入射すると，粒子にはローレンツ力(Lorentz force)$\vec{F}=q(\vec{v}\times\vec{B})$が働く．このとき$v_x$，$v_y$に対する運動方程式(equation of motion)は，

$$m\frac{dv_x}{dt}=\boxed{\quad a \quad} \tag{1}$$

$$m\frac{dv_y}{dt}=\boxed{\quad b \quad} \tag{2}$$

と表される．

問A　文中の$\boxed{\quad a \quad}$，$\boxed{\quad b \quad}$にあてはまる式を示せ．更に，v_yを消去することでv_xに関する2階の微分方程式(differential equation)を導け．また同様に，v_xを消去することでv_yに関する2階の微分方程式を導け．

問B　問Aで導いた微分方程式の一般解(general solution)は，特殊解(particular solution)の線形結合を用いて

$$v_x=C_1\cos\frac{qB}{m}t+C_2\sin\frac{qB}{m}t$$
$$v_y=C_3\cos\frac{qB}{m}t+C_4\sin\frac{qB}{m}t$$

と表される．この一般解が元の運動方程式(1)，(2)を満たすことにも注意して，$t=0$のとき$v_x=0$，$v_y=v_0$の初期条件(initial condition)下でC_1〜C_4を定めよ．

問C　$t=0$ のとき $x=0$, $y=0$ の初期条件下での粒子の座標 x, y を求めよ．また，このときの粒子の運動が等速円運動(uniform circular motion)になっていることを示し，円運動の半径 R (radius)を求めよ．

次に，荷電粒子が磁場に対して垂直に入射せず，磁場とのなす角が θ となる方向から初速度 v_0 で入射したとする ($0° < \theta < 90°$)．z 軸方向にはローレンツ力が働かないことから，このとき粒子は $\vec{B}$ に対して垂直(perpendicular)方向には問 A～C と同様の等速円運動(速度成分は $v_\perp$ とする)，平行(parallel)方向には等速直線運動(速度成分は $v_\parallel$ とする)をする．即ち，図 1 のようならせん状(helical)の軌道を描く．

ここで更に，図 2 に示したように磁場が z 軸方向に一様でなく，粒子が磁場中を運動している途中で磁束密度の大きさ $|\vec{B}|$ が B から B' へ変化すると仮定する．ただし，磁場の変化は断熱的(adiabatic)であり，変化の前後でらせん運動の角運動量(angular momentum) $l = R \times mv_\perp$ が保存量(conserved quantity)になっているとする．

問 D　磁場の変化の前後での，らせん運動の半径の比(ratio)を求めよ．

問 E　$B' > B$ のとき，$v_z = 0$ となる B' が存在する．このときの B' を，B, θ を用いて表せ．

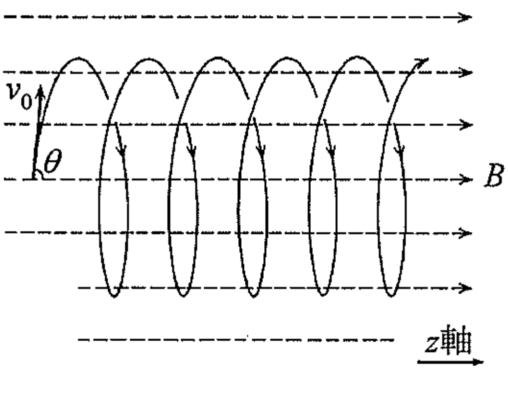

図 1

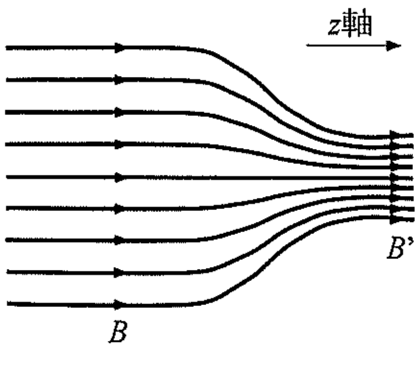

図 2

［問題2］以下の文章を読み，問A〜Eに答えよ．

エネルギー(energy)が $\varepsilon_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$ で与えられる量子振動子系 (quantum oscillator) を考える．ここで n は 0 以上の整数(integer)，ω は振動子の振動数(frequency)，$\hbar = h/2\pi$ で h は Planck 定数である．

問 A 温度(temperature)を T，Boltzmann 定数を k_{B} として分配関数 (partition function) $Z = \sum_n \exp(-\beta\varepsilon_n)$ を計算せよ．ここで $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ である．

問 B 分配関数を用いヘルムホルツ自由エネルギー(Helmholtz free energy) $F = -k_{\mathrm{B}}T\ln Z$ を求めよ．

問C この振動子が定常的な電場 (electric field) E の下に置かれた場合を考えよう．電場と振動子の間の双極子相互作用により，そのエネルギーが $\varepsilon_n(E) = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega + \hbar\left(\dfrac{1}{2}aE^2 + nbE\right)$ で与えられるとする．ここで a，b は電気双極子成分から生じた定数である．この系の分配関数 Z を計算せよ．

問D 電場におかれた振動子のヘルムホルツ自由エネルギー F を計算せよ．

問E 系の電気分極 (electric polarization) $P = -\partial F/\partial E$ を計算せよ．