[化学物理 I（基礎）]（全 3 題）

[問題 1]

密度 ρ, 半径 a の球体が密度 ρ', 粘性率 η の流体中を重力によって自由落下する場合を考える. ストークスの法則が成り立つとして以下の問いに答えよ. ただし, 重力加速度を g とする. （ストークスの法則；半径 a の球体が速度 v で粘性率 η の物質中を運動する際に受ける粘性抵抗力は $F = 6\pi a\eta v$ で与えられる.）

問 A　この球体の運動方程式を記せ. また, その終端落下速度を求めよ.

問 B　次に, 鉛直下方向に電場 E を加えると球体の終端落下速度が Δv だけ増加した. 球体の電荷 q を求めよ.

[問題 2]

原点の近傍のみで 0 でない電荷分布 $\rho(\boldsymbol{x}')$ が遠方につくる静電ポテンシャルを多極子で展開することを考える.

問 A $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ を極座標表示で (r,θ,ϕ), (r',θ',ϕ') と表したとき, $r' < r$ に対して成り立つ公式

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta',\phi') Y_{lm}(\theta,\phi)$$

（ただし, Y_{lm} は球面調和関数）を用いて, 静電ポテンシャル $\Phi(\boldsymbol{x})$ が

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}}$$

の形に表されることを示し, q_{lm} の表式を求めよ. q_{lm} を多極子モーメントと言う.

問 B 電荷密度が極座標表示で

$$\rho(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{32\pi} r'^2 e^{-r'} \cos^2\theta'$$

で与えられるとき, 0 でない多極子モーメント q_{lm} をすべて求めよ.

必要ならば以下の式を用いなさい.

$$Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \qquad Y_{11}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \mathrm{e}^{i\phi},$$

$$Y_{10}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \qquad Y_{22}(\theta,\phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta \mathrm{e}^{2i\phi},$$

$$Y_{21}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta \mathrm{e}^{i\phi}, \qquad Y_{20}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}),$$

$$Y_{l,-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y^*_{lm}(\theta,\phi), \qquad \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta Y^*_{lm}(\theta,\phi) Y_{l'm'}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'},$$

$$\int_0^{\infty} x^m \mathrm{e}^{-x} dx = m!.$$

[問題 3]

問 A ガウス型関数 $f(x) = e^{-\frac{1}{2}a^2x^2}, (a > 0)$ のフーリエ変換 $F(s)$ を求めよ．ただし関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx$ とする．

問 B 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(s)$、関数 $g(x)$ のフーリエ変換を $G(s)$ としたとき，$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$ のフーリエ変換が $F(s)G(s)$ となることを示せ．