[問題２]

大きさμの磁気モーメントをもつN個の粒子が格子状に並んでいるとする。この系に磁場 H が作用したとき、個々の磁気モーメントは周りの磁気モーメントの向きにかかわりなく、磁場に平行か反平行の向きのどちらかをとるものとする。いま磁場と反平行にある粒子の数をnとすると系の相互作用エネルギーUは,

$$U = (2n - N)\mu H$$

とあらわされる。このとき以下の設問に答えよ。

問 **A**　この系のカノニカル分配関数Qは、

$$Q = q^N \sum_{n=0}^{N} \left[(1)\right]$$

とかける。ここで q は磁気に関係のない部分の寄与からくる一分子分配関数をあらわす。(1)にあてはまる式を記入せよ。

問 **B** この系の平均の磁化の大きさを$\langle M \rangle$とする。ただし$\langle M \rangle = \mu\left(N - 2\langle n \rangle\right)$とし、$\langle n \rangle$は n の期待値をあらわす。分配関数から期待値をもとめる表式から出発して、以下の関係式が成り立つことを示せ。ただし k、T はそれぞれボルツマン定数、温度を表す。

$$\langle M \rangle = kT\left(\frac{\partial \ln Q}{\partial H}\right)_T$$

問 **C**　問 **A** および問 **B** の結果を利用して,

$$\langle M \rangle = N\mu \tanh\frac{\mu H}{kT}$$

となることを示せ。

$$\tanh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}$$

問 **D** $\Delta M = M - \langle M \rangle$としたとき、$\left\langle (\Delta M)^2 \right\rangle$ および$\langle M \rangle$の $T \to 0$ での振る舞いを記述せよ。